

读书报告:

六维球面上假定的复结构之 Hodge 数

邹思远

学号: 18307110469

专业: 数学与应用数学

摘要 本文中证明 S^6 上假定的复结构的 Frölicher 谱序列的 $E_r^{p,q}(S^6)$ 满足 Serre 对偶, 并证明 Dolbeault 上同调群 $H^{1,1}(S^6)$ 为 0 保证了 S^6 上一个全纯 2-形式活到 $E_2^{2,0}(S^6)$, 这特别说明了 Frölicher 谱序列在第二页不为 0.

关键词: 复结构, 六维球面, Frölicher 谱序列, Hodge 数.

注: 参考文献 [5] 没有找到, 故而其中的结果只能承认.

目录

第一章 正文	1
第 1 节 介绍	1
第 2 节 复流形的 Frölicher 谱序列	2
第 3 节 六维球面的 Hodge 数	3
第二章 附录	8
第 1 节 Frölicher 谱序列	8
第 2 节 de Rham 上同调群对 Dolbeault 上同调群的限制	8
第 3 节 Dolbeault 定理	9
第 4 节 Serre 对偶	10
第 5 节 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理	10

第一章 正文

第 1 节 介绍

在 [5] 中, A. Gray 最近证明了 S^6 上任何复结构的 Hodge 数 $h^{0,1}(S^6)$ 不为 0, 尽管 $H^1(S^6)$ 为 0. [5] 中也指出这是个有趣的性质, 因为这意味着 S^6 上存在一个非零的微分形式 $\alpha_{0,1}$, 它是 $\bar{\partial}$ -闭的但不是 $\bar{\partial}$ -恰当的, 并且有可能被在几何上表示出来.

Frölicher(或 Hodge-de Rham) 谱序列 $\{E_r^{p,q}(S^6)\}_{r \geq 1}$ 可以为 S^6 上复结构提供额外的不变量 [3]. 这个序列中的 $E_1^{p,q}$ 即为 Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}$, 并且 $\{E_r\}$ 收敛于 S^6 的 de Rham 上同调群 $H^*(S^6)$. 在此背景下, Gray 的结果意味着 $E_1(S^6) \not\cong E_\infty(S^6)$, 这说明谱序列在第一页不退化, 而 $H^1(S^6) = 0$, 这也等价于 Hodge 分解 $H^k = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ 在 $k = 1$ 时并不成立, 而 Kähler 流形在 $k = 1$ 时满足 Hodge 分解, 即 Frölicher 在第一页退化, 这与我们已知的著名结果 S^6 不是 Kähler 流形相吻合.

我们同样知道 S^6 上没有无限个 Kähler 结构, 这是由于 S^6 的二阶 Betti 数 $b_2(S^6) = 0$, 它甚至都没有辛结构. 然而, S^6 上从 $\mathbb{R}^7$ 获得了不可积的近复结构, 其 Cayley 数是纯虚数, 使得六维球面是近 Kähler 流形, 因而是 Einstein 的 [4].

我们将在命题 1.2 中使用与 [5] 中类似的办法证明 $h^{2,0}$ 与 $h^{1,1}$ 中至少一个是非零的, 由于 $0 < k < 6$ 时, $H^k(S^6) = 0$, 因而 Hodge 分解 $H^k = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$ 在 $k = 1, 2, 4, 5$ 时都不成立.

我们记 $h_r^{p,q}$ 等于 $\dim E_r^{p,q}(S^6)$, $r \geq 1$. 我们将这些维数称为 S^6 上假定的复结构的 Hodge 数 (注意到当 $r = 1$ 时, 它们就是我们通常意义上的 Hodge 数 $h^{p,q}$). 我们目前并不知道在 $r \geq 2$ 时, 对一般的 n 维复流形 M , $E_r^{p,q}(M)$ 与 $E_r^{n-p,n-q}(M)$ 是否同构, 但在定理 1.3 中我们会证明 S^6 的 Hodge 数满足 Serre 对偶, 即对所有的 r , 成立 $h_r^{p,q} = h_r^{3-p,3-q}$.

最后, 推论 1.4 说的是 S^6 的 Dolbeault 上同调群 $H^{1,1}$ 为 0 (注意到定理 1.3 中证明了 $E_2^{1,1} \cong \{0\}$) 意味着其 Frölicher 谱序列在第二页也不会退化. 因此, 我们发现 S^6 可能会是一个满足 $E_2 \not\cong E_\infty$ 的维数最小的单连通紧流形之例子, 这为 Griffiths 与 Harris 在 [6, 第 444 页] 中提出的问题提供了一个新的可能的解决方法. 如果能够对满足 $E_2 \not\cong E_\infty$ 的 (单连通) 紧复流形有更多了解, 就能对 S^6 上是否有复结构这个长期未解决的问题提供更多的信息. (这个问题的近期进展可以在 [8] 和 [9] 中找到.) 满足 $E_2 \not\cong E_\infty$, 维数远大于 3 的单连通紧复流形的例子被 Pittie 在 [10] 中给出. 如果不要求单连通, 三维紧复流形的例子最近在 [2] 中被给出.

第 2 节 复流形的 Frölicher 谱序列

在这一节, 我们证明对任何没有全纯 n -形式的 n -维复流形 M , 其谱序列 E_r 在第 n 页退化.

首先我们简单回顾一下复流形 M 上 Frölicher 谱序列的定义. Frölicher 谱序列是相伴于双复形 $(\Omega^{*,*}(M), \partial, \bar{\partial})$ 的第一谱序列, 即以 p 方向取分级滤列, 谱序列第一页为对双复形在 $\bar{\partial}$ 方向取上同调群, 正如双复形 $C^*(\mathcal{U}, \Omega^*)$ 的情况. 其中 $\Omega^{*,*}(M) = \bigoplus_{p,q} \Omega^{p,q}(M)$, $\Omega^{p,q}(M)$ 是 M 上 (p, q) 双分级的复值微分形式全体, ∂ 和 $\bar{\partial}$ 分别为外微分 d 的分解 $d = \partial + \bar{\partial}$ 中的 $(1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 型微分算子. 因此, $E_1^{p,q} \cong H^{p,q}(M) = \{\alpha_{p,q} \in \Omega^{p,q}(M) | \bar{\partial}\alpha_{p,q} = 0\} / \bar{\partial}(\Omega^{p,q-1}(M))$, 此即为 Dolbeault 上同调群的定义. 并且对任何的 k 成立相伴分级复形 $\text{Gr}H^k(M) \cong \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q}(M)$, 而相伴分级复形收敛于单复形 $(\Omega^n(M), d)$ 的 de Rham 上同调群, 其中 $\Omega^n(M) = \bigoplus_{p,q=n} \Omega^{p,q}(M)$. 这说明这些项 $E_r^{p,q}(M)$ 将 M 上表征复结构不变量的 Dolbeault 上同调与表征流形结构的 de Rham 上同调联系在一起. 关于 Frölicher 谱序列的详细定义在附录中阐述.

我们将使用谱序列的以下性质: $E_{r+1}^{p,q}(M)$ 为微分 d_r 相伴的上同调群, 其中 d_r 为

$$\dots \rightarrow E_r^{p-r, q+r-1}(M) \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q}(M) \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r, q-r+1} \rightarrow \dots \quad (1.1)$$

($r = 1$ 时 $d_1 = \partial$, 即

$$d_1([\alpha_{p,q}]) = [\partial\alpha_{p,q}] \in H^{p+1,q}(M), [\alpha_{p,q}] \in H^{p,q}(M).)$$

因此, $h_r^{p,q} \geq h_{r+1}^{p,q}$, 并且 $E_r^{p,q} = \{0\}$ 则意味着 $E_{r+s}^{p,q} = \{0\}$, 对所有的 $s \geq 1$ 都成立.

[5] 中证明了对 S^6 上任何可能的复结构, 其 Dolbeault 上同调群 $H^{0,3}(S^6)$ 与 $H^{3,0}(S^6)$ 都为 0. 事实上, 这个结果对所有 n 阶 Betti 数 $b_n(M) = 0$ 的 n 维紧复流形 M 均成立, 也就是说其 Dolbeault 上同调群 $H^{n,0}(M)$ 与 $H^{0,n}(M)$ 均为 0, 在附录中阐述这句话的具体细节. 特别地, 以下引理对这样的流形都成立.

引理 1.1. M 为一个复维数 n 的紧复流形. 如果 M 上没有全纯 n -形式, 那么 $E_n(M) \cong E_\infty(M)$.

证明. 首先, 没有全纯 n -形式的条件使得流形 M 为上文讨论的流形. 这是因为由 Dolbeault 定理, Dolbeault 上同调群 $H^{n,0} \cong H^0(M, \mathcal{O}^n) = 0$, $\mathcal{O}^n$ 为全纯 n -形式层, 又由 Serre 对偶有 $H^{n,0} = H^{0,n} = 0$. Dolbeault 定理和 Serre 对偶的具体细节在附录中阐述.

由 (1.1) 知道

$$E_{n+1}^{p,q} = \frac{\text{Ker}\{d_n : E_n^{p,q} \rightarrow E_n^{p+n, q-n+1}\}}{\text{Img}\{d_n : E_n^{p-n, q+n-1} \rightarrow E_n^{p,q}\}}.$$

由于 M 为 n -维复流形, 故而对于 p 或 q 小于 0 或者大于 n 的情况, $\Omega^{p,q}(M)$ 为 0, 在取了上同调群后有 $E_1^{p,q} = 0$, 不断取上同调群得到 $E_n^{p,q} = 0$. 因此, 首先采用同样的办法可以

得到对于 p 或 q 小于 0 或者大于 n 的情况, $E_{n+1}^{p,q} = 0$. 其次, 观察 $E_{n+1}^{p,q}$ 的定义可以发现, 当 $0 \leq p \leq n$ 时, 如果 $0 < p < n$ 或者 $1 < q < n-1$, $\text{Ker}\{d_n : E_n^{p,q} \rightarrow E_n^{p+n, q-n+1}\} = E_n^{p,q}$, $\text{Img}\{d_n : E_n^{p-n, q+n-1} \rightarrow E_n^{p,q}\} = 0$, 因而有 $E_n^{p,q} \cong E_{n+1}^{p,q}$. 在剩下可能的 (p, q) 组合中, $(0, 0), (0, 1), (n, n-1), (n, n)$ 由于相同的原因使得 $E_n^{p,q} \cong E_{n+1}^{p,q}$. 因此, 有可能成立 $E_n^{p,q} \not\cong E_{n+1}^{p,q}$ 的 (p, q) 数对是 $(0, n-1), (0, n), (n, 0), (n, 1)$. 在上述讨论中 Dolbeault 上调群 $H^{n,0}(M), H^{0,n}(M)$ 为 0, 而 Dolbeault 上调群 $H^{p,q}(M)$ 同构于谱序列第一页的元素 $E_1^{p,q}(M)$, 这意味着对所有的 $r \geq 1$, $E_r^{n,0}(M) = E_r^{0,n}(M) = 0$, 因此对于 (p, q) 为 $(0, n), (n, 0)$ 的情况成立 $E_n^{p,q} \cong E_{n+1}^{p,q} = 0$, 而对于 (p, q) 为 $(0, n-1), (n, 1)$ 的情况, 由于 $\text{Ker}(d_n) = \text{Img}(d_n) = 0$, 也得到 $E_n^{p,q} \cong E_{n+1}^{p,q}$. 所以在每个位置上的 d_n 都为 0, 对所有的 (p, q) 有 $E_n^{p,q} \cong E_{n+1}^{p,q}$. 我们可以用相同的方法推断出对所有的 $r > n$, 有 $d_r \equiv 0$, 因此 $E_n^{p,q}(M) = E_r^{p,q}(M) = E_\infty^{p,q}(M)$. $\square$

第 3 节 六维球面的 Hodge 数

这一节我们将对任何 S^6 上假定的复结构之 Hodge 数 $h_r^{p,q}$ 的性质做一些阐述.

命题 1.2. 对任何 S^6 上假定的复结构, 我们有:

$$h^{0,1} = h^{0,2} + 1 > 0 \text{ 且 } h^{2,0} + h^{1,1} = h^{1,0} + h^{1,2} + 1 > 0.$$

证明. 一个紧的 3-维复流形的欧拉数 χ 可以如下计算

$$\chi = \sum_{k=0}^6 (-1)^k b_k = \sum_{p,q=0}^3 (-1)^{p+q} h_r^{p,q},$$

对任何的 $r \geq 1$ 都成立 [3]. 这是因为谱序列 E_r 在 r 足够大的时退化并收敛于 de Rham 上调群 $H^*(M)$, 并且对于 p 或 q 小于 0 或者大于 3 的情况, 对所有的 $r \geq 1$ 成立 $E_r^{p,q} = 0$, 因而 $\chi = \sum_{k=0}^6 (-1)^k b_k = \sum_{p,q=0}^3 (-1)^{p+q} h_\infty^{p,q}$. 由于 E_n 为对 (E_{n-1}, d_{n-1}) 取上调群得到, E_{n-1} 只有有限项不为 0, 可以直接验证 $\sum_{p,q=0}^3 (-1)^{p+q} h_{n-1}^{p,q} = \sum_{p,q=0}^3 (-1)^{p+q} h_n^{p,q}$, 这个技巧在作业练习 14.37 中也使用过. 递推证明对于 $r \geq 1$ 该式子都成立.

特别地, 如果 $r = 1$, 由 Serre 对偶有 $h^{p,q} = h^{3-p, 3-q}$, 故而

$$\chi = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 (-1)^{p+q} h^{p,q} = 2 \left(\sum_{q=0}^3 (-1)^q h^{0,q} - \sum_{q=0}^3 (-1)^q h^{1,q} \right) = 2(\chi_0 - \chi_1),$$

其中 $\chi_p = \sum_{q=0}^3 (-1)^q h^{p,q}$, $p = 0, 1$.

但 χ_0 正是算数亏格 [7], 即椭圆复形 $(\Omega^{0,*}, \bar{\partial})$ 的指数, 用复流形的陈数表示为 $\chi_0 = \frac{1}{2}c_1 c_2$ [1]. 在附录中阐述这句话的具体细节.

如果 S^6 有复结构, 由于其 Betti 数 b_2 和 b_4 均为 0, 陈数 $c_1 = c_2 = 0$ 使得 $\chi_0 = 0$. 那么, 由于六维球面的欧拉数 $\chi = 2$, 我们可以得到 $\chi_1 = -1$.

因为 $H^{0,0} = \text{Ker}(\bar{\partial} : \Omega^{0,0} \rightarrow \Omega^{0,1}) \cong \mathcal{O}$, 而紧复流形上全纯函数只能为常数, 故而 $h^{0,0} = 1$. 最后, 由于 $h^{0,3} = 0$, 我们得到 $0 = \chi_0 = 1 - h^{0,1} + h^{0,2}$, $-1 = \chi_1 = h^{1,0} - h^{1,1} + h^{1,2} - h^{2,0}$. $\square$

定理 1.3. 对任何 S^6 上假定的复结构, 对于所有的 $r \geq 3$, $(p, q) \neq (0, 0), (3, 3)$, 我们有 $h_r^{p,q} = 0$, 并且有 $h_r^{0,0} = h_r^{3,3} = 1$. $r = 2$ 时有:

$$\begin{aligned} h_2^{0,0} &= h_2^{3,3} = 1, \\ h_2^{1,0} &= h_2^{1,1} = h_2^{3,0} = h_2^{0,3} = h_2^{2,2} = h_2^{2,3} = 0, \\ h_2^{0,1} &= h_2^{2,0} = h_2^{1,3} = h_2^{3,2}, \\ h_2^{0,2} &= h_2^{2,1} = h_2^{1,2} = h_2^{3,1}. \end{aligned}$$

并且有 $h_2^{0,1} = h^{1,2} - h^{1,1} + 1 \geq 0$.

证明. 对于 $1 \leq k \leq 5$ 有 $H^k(S^6) = \{0\}$, 且 $\dim H^0(S^6) = \dim H^6(S^6) = 1$, 并且由引理 1.1 对所有的 $r \geq 3$ 有 $\text{Gr}H^k \cong \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q} \cong \bigoplus_{p+q=k} E_r^{p,q}$, 因此对所有的 $(p, q) \neq (0, 0), (3, 3)$ 有 $h_r^{p,q} = 0$, 并且 $h_r^{0,0} = h_r^{3,3} = 1 (r \geq 3)$.

接下来证明对所有的 p, q , $E_2^{p,q} \cong E_2^{3-p,3-q}$. 一般的 E_n 由对 E_{n-1} 取上同调群得到, 故而 $h_n^{p,q} \leq h_{n-1}^{p,q}$, 对所有的 n 都成立. 首先我们知道 $h^{0,3} = h^{3,0} = 0$, 故而

$$h_r^{3,0} = h_r^{0,3} = 0 (r \geq 1).$$

由 Serre 对偶 $1 = h^{0,0} = h^{3,3}$, 有 $1 = h_3^{0,0} = h_3^{3,3} \leq h_2^{0,0}, h_2^{3,3} \leq h^{0,0} = h^{3,3} = 1$, 因而有

$$h_2^{0,0} = h_2^{3,3} = 1, h_r^{3,0} = h_r^{0,3} = 0 (r \geq 1). \quad (1.2)$$

从 (1.1) 和 (1.2) 可以知道对于 $(p, q) = (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3)$, $E_3^{p,q}$ 由序列 $0 \xrightarrow{d_2} E_2^{p,q} \xrightarrow{d_3} 0$ 取上同调群得到, 故而 $E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = 0$, 这说明

$$h_2^{1,0} = h_2^{1,1} = h_2^{2,2} = h_2^{2,3} = 0. \quad (1.3)$$

对于 (p, q) 组合 $(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3)$, $E_3^{p,q}$ 由序列 $0 \xrightarrow{d_2} E_2^{p,q} \xrightarrow{d_3} E_2^{p+2,q-1} \xrightarrow{d_3} 0$ 取上同调群得到, 故而

$$E_3^{p,q} \cong \text{Ker}d_2, E_3^{p+2,q-1} \cong E_2^{p,q} / \text{Im}d_2,$$

这说明 $h_2^{p,q} - h_2^{p+2,q-1}$ 等于 $\dim \text{Ker}d_2 + \dim \text{Im}d_2 - h_2^{p+2,q-1} = h_3^{p,q} - h_3^{p+2,q-1} = 0 - 0 = 0$. 这说明

$$h_2^{0,1} = h_2^{2,0}, h_2^{0,2} = h_2^{2,1}, h_2^{1,2} = h_2^{3,1}, h_2^{1,3} = h_2^{3,2}. \quad (1.4)$$

最后, 对于 $q = 0, 1, 2, 3$ 考虑以下序列

$$0 \xrightarrow{d_3} E_1^{0,q} \xrightarrow{d_2} E_1^{1,q} \xrightarrow{d_3} E_1^{2,q} \xrightarrow{d_2} E_1^{3,q} \xrightarrow{d_3} 0,$$

由于 $E_2^{p,q} \cong \text{Ker} d_1 / \text{Im} d_1$, 将上述序列拆成一些短正合列, 类似地进行交错和可以得到

$$h^{0,q} - h^{1,q} + h^{2,q} - h^{3,q} = h_2^{0,q} - h_2^{1,q} + h_2^{2,q} - h_2^{3,q},$$

并且代入 (1.2) 和 (1.3) 的结果可以得到

$$\begin{aligned} (1) & -h^{1,0} + h^{2,0} = h_2^{2,0}, \\ (2) & h^{0,1} - h^{1,1} + h^{2,1} - h^{3,1} = h_2^{0,1} + h_2^{2,1} - h_2^{3,1}, \\ (3) & h^{0,2} - h^{1,2} + h^{2,2} - h^{3,2} = h_2^{0,2} - h_2^{1,2} - h_2^{3,2}, \\ (4) & -h^{1,3} + h^{2,3} = -h_2^{1,3}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

由 Serre 对偶我们知道 $h^{p,q} = h^{3-p,3-q}$, 故而 (1.5) 中 (1) 与 (4) 等式左端差负号相等, 有

$$h_2^{2,0} = h_2^{1,3},$$

又由 (1.4) 有

$$h_2^{0,1} = h_2^{2,0} = h_2^{1,3} = h_2^{3,2}.$$

同样由 Serre 对偶 (1.5) 中 (2) 与 (3) 等式左端差负号相等, 故而成立

$$h_2^{0,1} + h_2^{2,1} - h_2^{3,1} = -(h_2^{0,2} - h_2^{1,2} - h_2^{3,2}),$$

可以被简化为 $h_2^{2,1} - h_2^{3,1} = -h_2^{0,2} + h_2^{1,2}$, 同样由 (1.4) 得到 $2h_2^{0,2} = 2h_2^{1,2}$, 故而有

$$h_2^{2,1} = h_2^{0,2} = h_2^{1,2} = h_2^{3,1}.$$

最后, 由于 $h_2^{2,1} = h_2^{3,1}$, $h_2^{2,0} = h_2^{0,1}$, 从 (1.5) 式子 (1), (2) 可以得到

$$h^{2,0} - h^{1,0} = h_2^{2,0} = h_2^{0,1} = h^{0,1} - h^{1,1} + h^{2,1} - h^{3,1} \geq 0.$$

由命题 1.2 有

$$h_2^{0,1} = h^{0,1} - h^{1,1} + h^{2,1} - h^{3,1} = h^{2,0} - h^{1,0} = -h^{1,1} + h^{1,2} + 1 \geq 0.$$

□

推论 1.4. 如果 S^6 有复结构, 那么其 Dolbeault 上同调群 $H^{0,1}$ 不会是 0[5]. 不止如此, S^6 的谱序列在第二页可能不退化, 这是因为要么 (1) $H^{1,1} \neq \{0\}$, 要么 (2) $H^{1,1} = \{0\}$. 情况 (2) 时 $H^{2,0} \neq \{0\}$, 则 $E_2^{2,0} \neq \{0\}$, 即 $E_2(S^6) \not\cong E_\infty(S^6)$.

情况 (2) 中由于命题1.2.有 $h^{2,0} + h^{1,1} > 0$, 那么 $h^{1,1} = 0$ 推出 $h^{2,0} > 0$. $E_2^{0,1} = \text{Ker}\{\partial : H^{0,1} \rightarrow H^{1,1}\} \cong H^{0,1} \not\cong \{0\}$, 而由定理1.3.有 $h_2^{2,0} = h_2^{0,1} > 0$.

注 1.1 由于 $E_2^{0,1} = \text{Ker}\{\partial : H^{0,1} \rightarrow H^{1,1}\}$, 我们有 $h^{0,1} \geq h_2^{0,1} \geq h^{0,1} - h^{1,1}$, 并且由定理1.3.的结论, 证明中的1.5第 (2) 式以及 Serre 对偶得到

$$\begin{aligned} h^{1,1} - h^{2,1} + h^{3,1} - h^{0,1} &= -h_2^{0,1} - h_2^{2,1} + h_2^{3,1} \\ h^{1,1} - h^{2,1} + h^{3,1} - h^{0,1} &= -h_2^{0,1} \text{ (定理1.3.)} \\ h^{1,1} - h^{1,2} + h^{0,2} - h^{0,1} &= -h_2^{0,1} \text{ (Serre 对偶)} \\ h^{1,1} - h^{1,2} + h^{0,2} &= h^{0,1} - h_2^{0,1} \geq 0, \\ h^{1,1} &\geq h^{1,2} - h^{0,2} \geq 0. \end{aligned}$$

因此在情况 (2) 中 $h^{1,1} = 0$ 使得

- $h^{1,2} = h^{0,2}$,
- $h^{0,1} = h^{0,2} + 1$ (命题1.2.),
- $h^{2,0} = h^{1,0} + h^{1,2} + 1$ (命题1.2.),

加上已知的 $H^{0,0} = h^{3,3} = 1$ 以及 Serre 对偶, 仅有 $h^{1,0}$ 与 $h^{0,2}$ 可以将可能非零的 $h^{p,q}$ 全部算出.

而且由于 $h_2^{2,0} = h_2^{0,1} = h^{0,1} = h^{2,0} - h^{1,0}$, 如果 $H^{1,0} \neq \{0\}$ 则有 $0 < h^{0,1} = h_2^{2,0} < h^{2,0}$, 可以得到一个惊人的事实: $E_1(S^6) \not\cong E_2(S^6) \not\cong E_\infty(S^6)$.

$E_2^{p,q}$ 与 $E_3^{p,q}$ 有显示表示如下 [2]:

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &\cong \frac{\{\alpha_{p,q} \in \Omega^{p,q} | 0 = \bar{\partial}\alpha_{p,q} = \partial\alpha_{p,q} + \bar{\partial}\alpha_{p+1,q-1}\}}{\{\bar{\partial}\beta_{p,q-1} + \partial\beta_{p-1,q} \in \Omega^{p,q} | 0 = \bar{\partial}\beta_{p-1,q}\}}, \\ E_3^{p,q} &\cong \frac{\{\alpha_{p,q} \in \Omega^{p,q} | 0 = \bar{\partial}\alpha_{p,q} = \partial\alpha_{p,q} + \bar{\partial}\alpha_{p+1,q-1} = \partial\alpha_{p+1,q-1} + \bar{\partial}\alpha_{p+2,q-2}\}}{\{\bar{\partial}\beta_{p,q-1} + \partial\beta_{p-1,q} \in \Omega^{p,q} | 0 = \bar{\partial}\beta_{p-1,q} + \partial\beta_{p-2,q+1} = \bar{\partial}\beta_{p-2,q+1}\}}, \end{aligned}$$

其中 $d_2([\alpha_{p,q}]) = [\partial\alpha_{p+1,q-1}]$, $d_3([\alpha_{p,q}]) = [\partial\alpha_{p+2,q-2}]$. 使用显示表示, 推论1.4.并考虑如果对 S^6 上任何复结构有都有 $E_2^{1,1}(S^6) = 0$, 我们得到以下推论.

推论 1.5. 如果 S^6 上有复结构, 那么 S^6 上存在一个非零 $\bar{\partial}$ -闭的微分形式 $\alpha_{0,1}$, 对任何 S^6 上的函数 f 都成立 $\alpha_{0,1} \neq df$, 且 $\partial\alpha_{0,1} \neq 0$. 除此之外, 对于 S^6 以下断言总有一个成立:

- (1) 其 Dolbeault 上同调群 $H^{1,1}$ 不为 0, 并且存在非零 $\bar{\partial}$ -闭的微分形式 $\alpha_{1,1} \notin \bar{\partial}(\Omega^{1,0}(S^6))$, 并且要么 $\partial\alpha_{1,1} \notin \bar{\partial}(\Omega^{2,0}(S^6))$, 要么 $\alpha_{1,1} = \bar{\partial}\beta_{1,0} + \partial\beta_{0,1}$ 且 $\bar{\partial}\beta_{0,1} = 0$.

(2) 其 Dolbeault 上同调群 $H^{1,1}$ 为 0 并且 S^6 上存在一个非零全纯 2-形式 $\alpha_{2,0}$. 除此之外, 尽管 $\alpha_{2,0} \notin d(\Omega^{1,0}(S^6))$, $\alpha_{2,0}$ 是 d -闭的, $\alpha_{2,0} \in d(\Omega_{\mathbb{C}}^1(S^6))$. 另一方面, 在此背景下 $E_2^{0,1} \neq \{0\}$, 故而之前提及的 S^6 上非零 $\bar{\partial}$ -闭的微分形式 $\alpha_{0,1}$ 满足: S^6 上存在某 ($\bar{\partial}$ -不闭的) 形式 $\alpha_{1,0}$, $\partial\alpha_{0,1} = \bar{\partial}\alpha_{1,0} \neq 0$.

注 1.2 $\alpha_{0,1}$ 是 $H^{0,1}$ 的某一非零代表元, 但不是 $H^1(S^6) = \{0\}$ 的代表元. 如果有函数 f 满足 $df = \partial f + \bar{\partial} f = \alpha_{0,1}$, 则 $\partial f = 0$ 推出 $f \in \bar{\mathcal{O}} \cong \mathbb{C}$, 则 $df = 0$, 所以 $\alpha_{0,1} \neq df$. 因此 $\alpha_{0,1}$ $\bar{\partial}$ -闭但 ∂ -不闭, 否则为 $H^1(S^6)$ 的非零代表元.

断言 (1) 描述的即为 $H^{1,1}$ 非零代表元 $\alpha_{1,1}$ 满足的性质. 并且, 考虑 $\alpha_{1,1}$ 是否为 $E_2^{1,1}$ 的代表元. 若否, 即 $\partial\alpha_{1,1} \neq 0 \in H^{2,1}$, 那么 $\partial\alpha_{1,1} \notin \bar{\partial}(\Omega^{2,0}(S^6))$. 若是, 考虑到 $E_2^{1,1} = \{0\}$, 由显示表示 $\alpha_{1,1} = \bar{\partial}\beta_{1,0} + \partial\beta_{0,1}$ 且 $\bar{\partial}\beta_{0,1} = 0$.

断言 (2) 对应推论 1.4 的情况 (2), 此时 $H^{2,0} \not\cong \{0\}$, 由 Dolbeault 定理 $H^{2,0} \cong \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^2) \cong \mathcal{O}^2$, $\mathcal{U}$ 为好覆盖, $\mathcal{O}^2$ 为全纯 2-形式, 非零全纯 2-形式 $\alpha_{2,0}$ 的存在性得证. 由 $H^{3,0} \cong \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^3) \cong \mathcal{O}^3 = \{0\}$ 知 $\partial\alpha_{2,0} = 0$, 由于 $h_2^{2,0} > 0$, 此时可以选取 $\alpha_{2,0}$ 为 $E_2^{2,0}$ 的非零代表元, 故而对任何的 $\alpha_{1,0}$ 满足 $\bar{\partial}\alpha_{1,0} = 0$, $\alpha_{2,0} \neq \partial\alpha_{1,0}$, 即 $\alpha_{2,0} \notin d(\Omega^{1,0}(S^6))$.

又由 $\bar{\partial}\alpha_{2,0} = 0$, 得到 $\alpha_{2,0}$ 是 d -闭的. 由于 $H^2(S^6) = 0$, $\alpha_{2,0}$ 不能为非零代表元, 故而 $\alpha_{2,0} \in d(\Omega_{\mathbb{C}}^1(S^6))$.

另一方面, 由于 $h_2^{0,1} = h_2^{2,0} > 0$, 我们可以使得给定的 $\alpha_{0,1}$ 为 $H^{0,1}$ 的代表元, $[\alpha_{0,1}]$ 为 $E_2^{0,1}$ 的代表元, 即 $0 \neq \partial\alpha_{0,1} = \bar{\partial}\alpha_{1,0}$. 由于 $d(\alpha_{1,0} - \alpha_{0,1}) = -\partial\alpha_{1,0}$, 而 $\alpha_{1,0}$ 不是 $\bar{\partial}$ -恰当的, 由 $H^1(S^6) = 0$, $\alpha_{1,0} - \alpha_{0,1}$ 不能是 d -闭的, 则 $\alpha_{1,0}$ 不是 ∂ -闭的.

第二章 附录

第 1 节 Frölicher 谱序列

这一节阐述 Frölicher 谱序列的正式定义. 对于给定的复流形 M , 考虑双复形 $K = \oplus K^{p,q}$, 其中 $K^{p,q} = (\Omega^{p,q}(M), \partial, \bar{\partial})$. 复值微分形式的外微分 d 自然有分解 $d = \partial + \bar{\partial}$, 所以双复形也可以单分级, 有 $K = \oplus_n K^n$, $K^n = (\Omega^n(M), d)$, 其中 $\Omega^n = \oplus_{p+q=n} \Omega^{p,q}$. 在此基础上选择滤列 $K_p = \oplus_{i \geq p} \oplus_{q \geq 0} K^{i,q}$. 注意这里 $\bar{\partial}$ 的定义不需要带上 $(-1)^p$ 的系数是因为微分形式坐标 $\wedge$ 的定义已经内含此系数.

令 $A = \oplus_p K_p$, 仍然是一个双复形, 并且可以按照单复形进行分级使得 $A = \oplus_n A^n$, 其中 $A^n = \oplus_p K^n \cap K_p$. 同样定义 $B = \oplus_p K_p / K_{p+1}$ 构成双复形并且可以单分级, 且微分算子 d 作用在 B 上成为 $\bar{\partial}$. 那么按照 $A^n \xrightarrow{i} A^n : K^n \cap K_{p+1} \xrightarrow{i} K^n \cap K_p$, A, A, B 构成正合偶. 取其导出偶得到

$$E_1 = H_d(B) = H_{\bar{\partial}}(K).$$

定义 2.1. 一个复流形上的 Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}(M) = \{\alpha_{p,q} \in \Omega^{p,q}(M) | \bar{\partial}\alpha_{p,q} = 0\} / \bar{\partial}(\Omega^{p,q-1}(M))$, 其中 $\Omega^{p,q}$ 为 (p,q) 复值微分形式.

因此谱序列的第一页 $E_1^{p,q} = H^{p,q}(M)$. 采用教材 14 节相同的办法得到双复形 K 相伴的谱序列 (E_r, d_r) 收敛于单分级上同调 $H_d(K) = H^*(M)$. 其中 $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, 并且

$$\begin{aligned} E_1^{0,q} &= H_{\bar{\partial}}^{p,q}(K), \\ E_2^{p,q} &= H_p^{p,q} H_{\bar{\partial}}(K), \end{aligned}$$

相伴分级复形成立

$$\text{Gr} H_d^n(K) = \oplus_{p+q=n} E_{\infty}^{p,q}(K).$$

第 2 节 de Rham 上同调群对 Dolbeault 上同调群的限制

这一节证明如果一个 n -维紧复流形 M 有 $b_n = 0$, 那么其 Dolbeault 上同调群 $H^{n,0} = H^{0,n} = 0$.

首先, 对任何的 $[\alpha] \in H^{n,0}$, $\bar{\partial}\alpha = 0$. 而 $\partial\alpha \in \Omega^{n+1,0} = 0$, 故而 $d\alpha = 0$, 有 $[\alpha] \in H^n$. 所以我们得到映射 $f : H^{n,0} \rightarrow H^n$.

f 是一个单映射: 假设 $\alpha = d\beta$, 那么

$$\int_M \alpha \wedge \bar{\alpha} = \int_M d\beta \wedge d\bar{\beta} = \int_M d(\beta \wedge d\bar{\beta}) = 0.$$

而将 α 在局部写成 $f dz_I$, $I = 1, 2, \dots, n$, 那么

$$\alpha \wedge \bar{\alpha} = (-2i)^{k_1} (-1)^{k_2} |f|^2 dx_I \wedge dy_I,$$

k_1, k_2 为整数. 这说明 $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ 在局部是实数或者纯虚数 (只与 n 的奇偶性相关), 相应的实部或者虚部大于等于 0, 除非为 0 才会有积分为 0. 因此 $\int_M \alpha \wedge \bar{\alpha} = 0$ 推出 $\alpha \wedge \bar{\alpha}$ 在局部都为 0, 也即推出 $\alpha = 0$.

因此, $\dim_{\mathbb{C}} H^{n,0} \leq \dim_{\mathbb{C}} H^n = b_n = 0$. 由 Serre 对偶, $H^{n,0} = H^{0,n} = \{0\}$.

第 3 节 Dolbeault 定理

这一节证明 Dolbeault 定理, 注意到 S^6 是可三角剖分的, 故而上总存在好覆盖.

定理 2.2. 对于一个 n -维复流形 M 与其好覆盖 $\mathcal{U}$, $\mathcal{O}^p$ 为全纯 p -形式层, 有同构

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}^p) \cong H^{p,q}(M),$$

其中, 左侧为 Čech 上同调群, 右侧为 Dolbeault 上同调群.

证明. 证明需要使用 $\bar{\partial}$ -Poincaré 引理.

引理 2.3. [$\bar{\partial}$ -Poincaré 引理] 对于 $\mathbb{C}^n$ 中任何一个圆盘 U , 在 $q \geq 1$ 时, 对任何的 p 有 $H^{p,q}(U) = 0$.

引理的证明可以参考 Griffiths, Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons, Inc, 1994, P25-27. 在黎曼曲面课上有一个低级版本的 $\bar{\partial}$ -Poincaré 引理, 即证明对于任何 $\mathbb{C}$ 中的圆盘 U , $w \in \Omega^{0,1}(U)$, 有 $f \in \Omega^{0,0}(U)$ 成立 $\bar{\partial}f = w$, 我想思想是一样的, 在此不过多阐述.

定理的证明使用教材 12.1, 即 Tic-Tac-Toe 引理. 首先对任何固定的 p , 令双复形 $K^{i,j} = C^i(\mathcal{U}, \Omega^{p,j})$, 微分算子 $D = \delta + \bar{\partial}'$, $\bar{\partial}'(x)_{m_1, \dots, m_i} = (-1)^i (\bar{\partial}x)_{m_1, \dots, m_i}$. 由 $\bar{\partial}$ -Poincaré 引理 2.3, $H_{\bar{\partial}}(K)$ 只剩下第 0 列 $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}^p)$ 可能不为 0, 由 Tic-Tac-Toe 引理有 $H_{\delta} H_{\bar{\partial}}(K) \cong \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}^p) \cong H_D^{p+i}(K)$. 另一方面, 由于 $\Omega^{p,j}$ 为好层 (fine sheaf), 所以 $H_{\delta}(K)$ 只剩下第 0 行 $C^0(\mathcal{U}, \Omega^{p,j})$ 可能不为 0, 由 Tic-Tac-Toe 引理有 $H_{\bar{\partial}} H_{\delta}(K) \cong H^{p,j}(M) \cong H_D^{p+j}(K)$. $\square$

第 4 节 Serre 对偶

Serre 对偶对 Dolbeault 上同调群的成立类似于 de Rham 上同调群满足的 Poincaré 对偶. 由于任何光滑流形都有 Riemann 度量, 并且由于假定 S^6 有复结构, 可以使得 Riemann 度量与复结构相容, 即 $(w_1, w_2) = (w_1, \overline{w_2})$, 在此基础上 S^6 成为一个 Hermitian 流形. 对于一个紧复流形 M 满足 $\dim_{\mathbb{C}}(M) = n$, 可以定义 Hodge 星算子:

$$\star : \Omega^{p,q} \xrightarrow{\cong} \Omega^{n-q, n-p},$$

其中 $\Omega^{p,q}$ 为 (p, q) 复值微分形式. 复结构诱导的共轭作用有:

$$\overline{(\cdot)} : \Omega^{p,q} \xrightarrow{\cong} \Omega^{q,p},$$

故而有算子

$$\overline{\star} = \star \circ \overline{(\cdot)} = \overline{(\cdot)} \circ \star : \Omega^{p,q} \xrightarrow{\cong} \Omega^{n-p, n-q}.$$

通过非退化二次型

$$\langle -, - \rangle = \int_{S^6} (-) \wedge \overline{\star}(-) : H^{p,q} \otimes H^{n-p, n-q} \rightarrow \mathbb{C}$$

给出 Dolbeault 上同调群同构

$$H^{p,q}(M) \cong H^{n-p, n-q}(M).$$

故而 $h^{p,q} = h^{n-p, n-q}$.

一般地, Serre 对偶定理对紧复流形 M 上全纯向量丛 E 成立 (也有代数几何版本).

第 5 节 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理

这一节涉及的内容过于复杂, 我只能简单介绍. 承认一个事实: 对于流形 M 来说, 以有像极限定义的 Čech 上同调群 $\check{H}(M, \mathcal{F})$ 与以层的内射分解定义的层上同调群 $H(M, \mathcal{F})$ 同构, 其中 $\mathcal{F}$ 为一个层. 在记号上不对这两种上同调群作区分.

定义 2.4. (符号) 对于复流形 M 上的全纯向量丛 E , 线性微分算子 $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, 其符号 (symbol) 为向量丛映射

$$\sigma(P) : T^*M \otimes_M E \rightarrow E,$$

$\otimes_M$ 为向量丛张量积. 其中, 对任何的 $x \in M$, $(df)_x \in \Gamma(T^*M)_x$,

$$\sigma(P)_x : df_x \mapsto [D, f]_x.$$

定义 2.5. (椭圆复形) 对于复流形 M 上的一列全纯向量丛 $\{E_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 如果其全纯截面及微分算子构成的链复形满足

$$\cdots \rightarrow \Gamma(E_{k+1}) \xrightarrow{P_k} \Gamma(E_k) \rightarrow \cdots$$

考虑 $\pi: T^*M \rightarrow M$, 其对应的符号列

$$\cdots \rightarrow \pi^* E_{k+1} \xrightarrow{\sigma(P_k)} \pi^*(E_k) \rightarrow \cdots$$

正合, 则称为椭圆复形.

对于一个紧复流形 M , 其 de Rham 复形 (Ω^*, d) 构成椭圆复形, 其指数为流形 M 的欧拉示性数:

$$\text{Ind}(\Omega^*, d) = \chi(M) = \sum_{p=0}^{\dim_{\mathbb{C}}(M)} (-1)^p \dim H^p(M).$$

定义 2.6. (算数亏格) 对于 n 维紧复流形 M 上的全纯向量丛 E , $\mathcal{O}(E)$ 为其全纯截面层, 上同调群 $H^p(M, E)$ 定义为以 $\mathcal{O}(E)$ 为取值的层上同调群 $H^p(M, \mathcal{O}(E))$. 则算数亏格

$$\chi(M, E) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim H^p(M, E).$$

如果考虑 M 上平凡丛 $E = M \times \mathbb{C}$, 那么全纯截面层 $\mathcal{O}(E)$ 即为 M 上全纯函数层. M 的 Dolbeault 复形 $(\Omega^{0,*}, \bar{\partial})$ 构成的椭圆复形指数为:

$$\text{Ind}(\Omega^{0,*}, \bar{\partial}) = \sum_{p=0}^{\dim_{\mathbb{C}}(M)} (-1)^p \dim H^{0,p}(M)$$

注意到 S^6 是可三角剖分空间, 因而任意开覆盖可以被好覆盖加细, 由 Dolbeault 定理有 $H^q(S^6, \mathcal{O}^p) \cong \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}^p) \cong H^{p,q}(S^6)$, $\mathcal{U}$ 为任意好覆盖. 因此, 椭圆复形 Dolbeault 复形的指数为 S^6 平凡丛 $E = S^6 \times \mathbb{C}$ 的算数亏格, 即

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Omega^{0,*}, \bar{\partial}) &= \sum_{p=0}^{\dim_{\mathbb{C}}(S^6)} (-1)^p \dim H^{0,p}(S^6) \\ &= \sum_{p=0}^{\dim_{\mathbb{C}}(S^6)} (-1)^p \dim H^p(S^6, E) = \chi(S^6, E). \end{aligned}$$

另一方面, 算数亏格的计算有 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理.

定理 2.7. (Hirzebruch-Riemann-Roch) 对于紧复流形 M 与全纯向量丛 E ,

$$\chi(M, E) = \int_M \text{ch}(E) Td(M),$$

其中 $Td(M)$ 为 M 切丛的 Todd 类.

因此, 椭圆复形 Dolbeault 复形的指数为 S^6 平凡丛的算数亏格, 用陈数表示为 $\frac{1}{2}c_1c_2$ [1].

参考文献

- [1] Atiyah, M. F. and Singer, I. M.: The index of elliptic operators: III, *Ann. Math.* 87 (1968), 546-604.
- [2] Cordero, L. A., Fernandez, M., Gray, A. and Ugarte, L.: A general description of the terms in the Frolicher spectral sequence, *Differential Geom. Appl.* 7 (1997), 75-84.
- [3] Frolicher, A.: Relations between the cohomology groups of Dolbeault and topological invariants, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 41 (1955), 641-644.
- [4] Gray, A.: The structure of nearly Kahler manifolds, *Math. Ann.* 223 (1976), 233-248.
- [5] Gray, A.: A property of a hypothetical complex structure on the six sphere, *Bol. Un. Mat. Ital. B* (7) 11 (1997), Suppl. fasc. 2, 251-255.
- [6] Griffiths, P. and Harris, J.: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [7] Hirzebruch, F.: *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd edn, Springer, Berlin, 1966.
- [8] Huckleberry, A., Kebekus, S. and Peternell, T.: Group actions on S^6 and complex structures on P^3 , *Duke Math. J.* (to appear).
- [9] LeBrun, C.: Orthogonal complex structures on S^6 , *Proc. Amer. Math. Soc.* 101 (1) (1987), 136-138.
- [10] Pittie, H.: The nondegeneration of the Hodge-de Rham spectral sequence, *Bull. Amer. Math. Soc.* 20 (1989), 19-22